3. Calcolo dei limiti e confronti asintotici

3.1 Introduzione

La teoria delle serie numeriche sviluppata nel capitolo 2 ci fornisce diversi criteri per determinare il carattere di una assegnata serie. La concreta applicabilità di tali criteri si fonda sulla capacità di:

- calcolare i limiti (ciò di cui abbiamo bisogno, ad esempio, se vogliamo applicare il criterio del rapporto o quello della radice, o se vogliamo verificare la condizione necessaria di convergenza);
- effettuare confronti asintotici tra successioni (essenziale quando si vuole applicare il criterio del confronto asintotico e spesso utile anche nel calcolo dei limiti, specialmente in casi non risolubili elementarmente).

In questo capitolo siamo interessati ad apprendere quegli strumenti di calcolo che servono ai suddetti scopi. Più precisamente, vedremo:

- una rassegna di **limiti notevoli**, cioè limiti che coinvolgono le principali funzioni elementari e si presentano come forme indeterminate, cioè non risolubili in modo immediato tramite il teorema 2.16;
- la **tecnica dei confronti asintotici**, che consiste nel passare da una successione, in genere dalla forma complicata, ad un'altra, ad essa asintotica, dalla forma più semplice.

Questi strumenti non solo risulteranno utili per la determinazione del comportamento di un'ampia categoria di serie numeriche, ma si riveleranno adeguati per gli argomenti che svilupperemo più avanti, quando tratteremo le nozioni di continuità e di derivabilità. Per questo motivo, e per evitare inutili e lunghe ripetizioni, la discussione sul calcolo dei limiti e sulla tecnica dei confronti asintotici verrà impostata sia nel contesto delle successioni, sia in quello delle funzioni.

3.2 Successioni infinitesime e divisione per zero

Definizione 3.1 *Una successione $\{a_n\}$ tale che $a_n \to 0$ si dice* ***infinitesima****.*

Osserviamo che una successione $\{a_n\}$ converge ad un numero $a \in \mathbb{R}$ se e solo se la successione $\{a_n - a\}$ è infinitesima.

Definizione 3.2 *Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente ad a* ***per eccesso*** *se $a_n \to a$ e $a_n > a$ definitivamente; in tal caso scriviamo $a_n \to a^+$. Analogamente, a_n converge ad a* ***per difetto*** *e si scrive $a_n \to a^-$ se $a_n \to a$ e $a_n < a$ definitivamente.*

Ad esempio $\frac{1}{n} \to 0^+$, $-\frac{1}{n} \to 0^-$, mentre la successione $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ è infinitesima ma senza un segno definito (i suoi termini cambiano segno in modo alterno). Si noti che le scritture 0^+ e 0^- (e più in generale a^+ e a^-) non indicano numeri ma sono simboli che hanno un senso solo nel contesto del calcolo dei limiti, come espresso nella definizione precedente.

Con le nozioni di successione infinitesima per eccesso o per difetto, possiamo completare il quadro sul calcolo del limite di successioni quozienti con denominatore infinitesimo, come formulato nel seguente teorema.

Teorema 3.3 *Siano $\{a_n\}$ una successione che ammette limite e $\{b_n\}$ una successione infinitesima. Vale che:*

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a > 0 \\ b_n \to 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to +\infty\,, \qquad \left.\begin{array}{l} a_n \to a < 0 \\ b_n \to 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to -\infty\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a > 0 \\ b_n \to 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to -\infty\,, \qquad \left.\begin{array}{l} a_n \to a < 0 \\ b_n \to 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to +\infty$$

(il limite a della successione $\{a_n\}$ può anche essere infinito).

In altri termini, possiamo trattare algebricamente i simboli 0^+ e 0^- nel modo seguente:

$$\boxed{\frac{x}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0 \\ -\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \frac{x}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}}$$

Si noti che il caso $\frac{0}{0}$ resta non definito. Inoltre sottolineiamo il fatto che le scritture $\frac{x}{0^+}$ e $\frac{x}{0^-}$ non significano che stiamo dividendo per il numero zero (infatti 0^+ e 0^- non sono numeri) ma sintetizzano una divisione per una successione infinitesima con segno positivo (se 0^+) o negativo (se 0^-). Infine osserviamo che il caso $\frac{x}{0}$ (senza un segno al denominatore) non è definito.

3.3 Confronto tra infiniti

Sappiamo che $n^\alpha \to +\infty$ per $n \to +\infty$, se $\alpha > 0$. Inoltre anche $r^n \to +\infty$ se $r > 1$ e $\log_b n \to +\infty$ se $b > 1$. Se ora vogliamo studiare il limite o il comportamento asintotico di successioni che sono combinazioni di potenze, esponenziali e logaritmi, ci possiamo trovare di fronte a forme indeterminate del tipo $\infty - \infty$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ di risoluzione non immediata.

In questa sezione esaminiamo situazioni di questo genere, in cui si hanno quozienti o differenze di successioni divergenti di tipo diverso, precisamente con crescita esponenziale (con base maggiore di 1) o potenza (con esponente positivo) o logaritmo (a base maggiore di 1) o anche con crescita fattoriale. Vedremo che a seconda della tipologia della successione, si ha una "velocità di divergenza" diversa.

Il succo del discorso si può riassumere nelle seguenti affermazioni:

- la potenza cresce più rapidamente del logaritmo.
- l'esponenziale cresce più rapidamente della potenza,
- il fattoriale cresce più rapidamente dell'esponenziale.

Il significato preciso di ciò è spiegato nelle seguenti formule:

$$\begin{array}{l} \text{(i) Se } \alpha > 0 \text{ e } b > 0,\ b \neq 1, \text{ allora } \dfrac{n^\alpha}{\log_b n} \to +\infty \text{ per } n \to +\infty. \\ \text{(ii) Se } r > 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \text{ allora } \dfrac{r^n}{n^\alpha} \to +\infty \text{ per } n \to +\infty. \\ \text{(iii) Per ogni } r \in \mathbb{R} \text{ si ha che } \dfrac{n!}{r^n} \to +\infty \text{ per } n \to +\infty. \end{array} \tag{3.1}$$

(Avevamo già dimostrato la (ii) nel capitolo precedente – Corollario 2.44. Vediamo ora alcune utili conseguenze delle formule (3.1).

Corollario 3.4 (i) *Se* $r > 1$ *e* $\alpha, c \in \mathbb{R}$ *allora* $r^n + c\,n^\alpha \sim r^n$ *per* $n \to +\infty$.

(ii) *Se* $\alpha, b > 0$, $b \neq 1$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *allora* $n^\alpha + c\log_b n \sim n^\alpha$ *per* $n \to +\infty$.

(iii) $\sqrt[n]{n} \to 1$ *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione. (i) Sapendo che $\frac{r^n}{n^\alpha} \to +\infty$, abbiamo che $\frac{n^\alpha}{r^n} \to 0$ e quindi

$$\frac{r^n + c\, n^\alpha}{r^n} = 1 + c\, \frac{n^\alpha}{r^n} \to 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Questo equivale a dire che $r^n + c\, n^\alpha \sim r^n$ per $n \to +\infty$. La parte (ii) si prova allo stesso modo sfruttando il limite $\frac{n^\alpha}{\log_b n} \to +\infty$.

Idea della dimostrazione di (iii): si scrive $\sqrt[n]{n} = 2^{\log_2 \sqrt[n]{n}} = 2^{\frac{\log_2 n}{n}}$ e si sfrutta il fatto che $\frac{\log_2 n}{n} \to 0$ e che se $\{a_n\}$ è una successione infinitesima, allora $2^{a_n} \to 1$. □

3.4 Il numero di Nepero

Un problema di matematica finanziaria

Un capitale iniziale x_0 viene depositato in banca, con un tasso percentuale di interesse annuo pari al $T\%$. Se l'interesse viene maturato tutto alla fine dell'anno, il capitale finale vale

$$x_1 = x_0 + t x_0 = x_0\,(1+t) \quad \text{dove } t = \frac{T}{100}\ .$$

Supponiamo ora di suddividere l'anno in n periodi di egual durata, al termine di ciascuno dei quali viene corrisposta una frazione n-esima dell'interesse relativo all'intero anno e supponiamo che al termine di ogni periodo il capitale raggiunto possa essere immediatamente reinvestito, alle stesse condizioni. Dunque, dopo il primo degli n periodi si avrà un capitale parziale pari a

$$p_1 = x_0 + \frac{t}{n} x_0 = x_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)\ ,$$

dopo il secondo periodo il capitale ammonterà a

$$p_2 = p_1 + \frac{t}{n} p_1 = p_1 \left(1 + \frac{t}{n}\right) = x_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)^2.$$

Al termine dell'anno, dopo tutti gli n periodi, il capitale ottenuto vale

$$x_n = x_0 \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\ .$$

Ci chiediamo:

- se sia più conveniente un investimento con capitalizzazione unica o frazionaria,

- di quanto il capitale possa essere eventualmente incrementato, scegliendo un regime di capitalizzazione frazionaria, per un numero n di frazioni molto grande.

Per rispondere a tali questioni dobbiamo studiare il comportamento della successione $\left\{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\right\}$ e possibilmente valutarne il limite per $n \to +\infty$. Ciò non è affatto immediato in quanto, scrivendo, ad esempio, $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = 2^{n\log_2\left(1+\frac{t}{n}\right)}$, l'espressione $n\log_2\left(1+\frac{t}{n}\right)$ ad esponente presenta una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$ (vedi nota[1] a pie' di pagina).

Un primo fondamentale risultato in questa direzione è espresso dal seguente

Teorema 3.5 *La successione* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *è non decrescente e limitata e quindi convergente. Il suo limite si chiama* ***numero di Nepero****.*

Dimostrazione. Poniamo

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Vogliamo dimostrare che $\{a_n\}$ è non decrescente. A tale scopo utilizziamo alcune nozioni relative alle medie aritmetica e geometrica di un insieme finito di numeri. Dati k numeri reali $x_1, \ldots, x_k > 0$ si definiscono:

$$M_a = \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} \quad \text{media aritmetica}$$
$$M_g = \sqrt[k]{x_1 \cdots x_k} \quad \text{media geometrica}$$

Tra le medie aritmetica e geometrica sussiste la seguente relazione:

$$M_g \leq M_a\ . \tag{3.2}$$

Prendendo $k = n+1$, $x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$, troviamo che

$$M_g = \sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{1}{n}\right)1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$M_a = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\ .$$

Applicando la disuguaglianza (3.2) otteniamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

[1] Vale che se $a_n \to 1$ allora $\log_b a_n \to 0$ qualunque sia la base $b > 0$, $b \neq 1$.

cioè

$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}\ .$$

Abbiamo così provato che la successione $\{a_n\}$ è non decrescente. Ora prendiamo $k = n+1$, $x_1 = \cdots = x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = 1$, calcoliamo

$$M_g = \sqrt[n+1]{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{1}{n}\right)1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$M_a = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

e applichiamo nuovamente la disuguaglianza (3.2) ottenendo che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \le \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

cioè

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \le \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

e quindi, passando ai reciproci,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n .$$

Dunque, se definiamo $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, la precedente disuguaglianza si legge $b_n \le b_{n-1}$, cioè ci dice che la successione $\{b_n\}$ è non crescente. In particolare $b_n \le b_1$ per ogni n. D'altra parte

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad \forall n$$

e quindi $a_n \le b_1$ per ogni n. Dunque la successione $\{a_n\}$ è limitata tra $a_1 = 2$ e $b_1 = 4$. Per il teorema 2.22 sulle successioni monotòne limitate, $\{a_n\}$ è convergente. □

Stima del numero di Nepero

Il numero di Nepero, definito nel teorema 3.5, si denota con la lettera e. Dunque, per definizione,

$$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Il numero e è una delle costanti matematiche fondamentali. Vogliamo ora stimarne il suo valore, sia per eccesso sia per difetto. In base al teorema 3.5, si ha che

$$e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ :\ n = 1,2,\dots\right\} . \tag{3.3}$$

D'altra parte, tenuto conto di quanto svolto nella dimostrazione del teorema 3.5, anche la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ converge (in quanto monotòna limitata) e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\ .$$

Avendo visto che la successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è non crescente, possiamo dedurre anche che

$$e = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ :\ n=1,2,\dots\right\}\ . \tag{3.4}$$

Da (3.3) e (3.4) ricaviamo quindi che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ .$$

Questa doppia disuguaglianza ci permette di stimare il valore di e per eccesso e per difetto. Ovviamente la stima sarà tanto migliore quanto più grande si prende n.

Si ottiene che, approssimativamente,

$$\boxed{e = 2,718...}$$

Si può dimostrare che e è un numero irrazionale (si noti che e è definito come limite di numeri razionali).

Esempio 3.6 *Determinare il carattere della serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Poniamo $a_n = \frac{n!}{n^n}$ e applichiamo il criterio del rapporto. Abbiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n(n+1)}\cdot\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Siccome $e>1$, $\frac{1}{e}<1$ e quindi per il criterio del rapporto la serie converge. In particolare, siccome il termine generale di una serie convergente è infinitesimo (teorema 2.33) deduciamo anche che $\frac{n!}{n^n}\to 0$ per $n\to+\infty$. Ma $\frac{n!}{n^n}>0$ per ogni n. Quindi possiamo dire meglio che $\frac{n!}{n^n}\to 0^+$ e di conseguenza $\frac{n^n}{n!}\to+\infty$, cioè la successione n^n diverge più rapidamente della successione dei fattoriali.

Esponenziale e logaritmo naturale

Con la stessa tecnica vista nella dimostrazione del teorema 3.5 si può provare che per ogni $x\in\mathbb{R}$ la successione $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ è non decrescente e limitata e quindi è convergente. Si definisce quindi

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\ . \tag{3.5}$$

La funzione $\exp(x)$ risulta soddisfare le proprietà caratteristiche delle funzioni esponenziali a base maggiore di 1:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 0 < \exp(x_1) < \exp(x_2) \\ \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)\,. \end{cases}$$

Siccome $\exp(1) = e$, si ha che $\exp(x) = e^x$ cioè

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \to e^x \quad \text{per } n \to +\infty\,.}$$

Riprendendo il problema di matematica finanziaria da cui siamo partiti, possiamo concludere che è più conveniente un investimento a capitalizzazione frazionaria. Inoltre per un numero n di frazioni molto grande il capitale non viene incrementato indefinitamente ma al massimo di un fattore pari al numero di Nepero elevato alla frazione percentuale del tasso di interesse.

Osservazione 3.7 *La funzione* $\exp(x)$ *definita in (3.5) in forma di limite permette di costruire direttamente l'elevamento a potenza (con base e) di un qualsiasi numero reale, evitando la definizione mediante approssimazione con esponenti razionali, una cui presentazione rigorosa risulta piuttosto lunga e pesante.*

Il logaritmo in base e di un numero $x > 0$ si chiama **logaritmo naturale** o **logaritmo neperiano** di x e si denota $\ln x$ o $\log x$ senza indicazione esplicita della base, che si sottintende essere il numero di Nepero.

Come si vedrà in seguito quando si studierà il calcolo differenziale e quello integrale, l'esponenziale in base e ed il logaritmo neperiano godono di proprietà tali da costituire in un certo senso le più semplici e "naturali" funzioni esponenziale e logaritmica, rispettivamente, rispetto alla scelta della base.

Essendo $e > 1$ valgono le seguenti proprietà di limite:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n \to x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; e^{x_n} \to e^x \\ (x_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x_n} \to 1) \\ x_n \to -\infty \;\Leftrightarrow\; e^{x_n} \to 0 \\ x_n \to +\infty \;\Leftrightarrow\; e^{x_n} \to +\infty \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a_n \to a \in (0, +\infty) \;\Leftrightarrow\; \log a_n \to \log a \\ (a_n \to 1 \;\Leftrightarrow\; \log a_n \to 0) \\ a_n \to 0^+ \;\Leftrightarrow\; \log a_n \to -\infty \\ a_n \to +\infty \;\Leftrightarrow\; \log a_n \to +\infty \end{array}}$$

3.5 Limiti notevoli per l'esponenziale e il logaritmo

Nella sezione 3.4 abbiamo visto che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ per $n \to +\infty$. Se ora poniamo $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, il precedente limite si scrive nella forma $(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$ per $n \to +\infty$ e la successione $\{\varepsilon_n\}$ è una particolare successione infinitesima. In realtà vale la seguente generalizzazione.

Teorema 3.8 *Se $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima, con $\varepsilon_n \neq 0$ e $\varepsilon_n > -1$ per ogni n, allora $(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} \to e$ per $n \to +\infty$.*

Vediamo alcune importanti conseguenze del risultato precedente.

Corollario 3.9 **(i)** *Se $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima, con $\varepsilon_n \neq 0$ e $\varepsilon_n > -1$ per ogni n, allora $\frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 1$ per $n \to +\infty$.*

(ii) *Se a è un numero positivo e $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima, con $\varepsilon_n \neq 0$ per ogni n, allora $\frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} \to \log a$ per $n \to +\infty$.*

Dimostrazione. **(i)** Poniamo $x_n = (1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}$. Sappiamo che $x_n \to e$. Quindi $\log x_n \to \log e$. Ma $\log e = 1$ e $\log x_n = \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}$.
(ii) Poniamo $t_n = a^{\varepsilon_n} - 1$ e ricaviamo ε_n in funzione di t_n. Abbiamo che $a^{\varepsilon_n} = 1 + t_n$ e quindi, passando ai logaritmi, $\varepsilon_n \log a = \log(1+t_n)$ cioè $\varepsilon_n = \frac{\log(1+t_n)}{\log a}$. Quindi

$$\frac{a^{\varepsilon_n}-1}{\varepsilon_n} = \frac{t_n \log a}{\log(1+t_n)} \ .$$

Infine osserviamo che, essendo $\{\varepsilon_n\}$ infinitesima, anche $\{t_n\}$ lo è. Possiamo così applicare il limite $\frac{\log(1+t_n)}{t_n} \to 1$ già visto nel punto (i) per ottenere la tesi. □

3.6 Successioni esponenziali a base variabile

Esaminiamo il comportamento di successioni della forma

$$x_n = a_n^{b_n} \tag{3.6}$$

dove $\{a_n\}$ è una successione di numeri positivi che ammette limite e $\{b_n\}$ è una successione di numeri reali che pure ammette limite. Per calcolare il limite o determinare il comportamento asintotico di tali successioni, conviene sfruttare l'identità

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \log a_n}$$

(abbiamo qui scelto come base il numero di Nepero, ma avremmo potuto prendere una qualsiasi altra base). Leggendo le tabelle dei limiti di esponenziale e logaritmo esposte in fondo alla sezione 3.4 e le regole per il prodotto discusse alla fine della sezione 2.4, possiamo costruire la seguente tabella, utile per il calcolo di limiti di successioni della forma (3.6).

$a^{+\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } 1 < a \leq +\infty \end{cases}$	$a^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < a \leq +\infty \end{cases}$
$0^b = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < b \leq +\infty \\ +\infty & \text{se } -\infty \leq b < 0 \end{cases}$	$(+\infty)^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < b \leq +\infty \\ 0 & \text{se } -\infty \leq b < 0 \end{cases}$

I casi non coperti dalla precedente tabella sono: 0^0, $1^{\pm\infty}$, $+\infty^0$ e costituiscono ulteriori forme indeterminate. Ciò significa che, ad esempio, se $a_n \to 1$ e $b_n \to +\infty$, non è possibile dare una risposta valida in generale sul limite di $a_n^{b_n}$; tale limite dipende dal caso specifico in esame.

Nota bene. Nella tabella precedente la scrittura $0^b = +\infty$ quando $-\infty \leq b < 0$ è da intendere, più correttamente, come $(0^+)^b = -\infty$ cioè va letta in questo modo: se $a_n \to 0^+$ e $b_n \to b$ con $-\infty \leq b < 0$ allora $a_n^{b_n} \to +\infty$.

3.7 La nozione di limite per funzioni reali di variabile reale

Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ di variabile reale x, a valori in $\mathbb{R}$. In generale la funzione $f(x)$ sarà definita per x in un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ (D è il dominio della funzione). Tipicamente il dominio D è esprimibile come unione di intervalli (ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ è definita per quegli x tali che $1 + x > 0$ e $x \neq 0$; dunque il dominio di f è l'insieme $D = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$).

Se un certo intervallo fa parte del dominio D della funzione e i suoi estremi non stanno in D, un'informazione importante per comprendere come è fatto il grafico di f è data dalla conoscenza del comportamento di $f(x)$ per valori di x prossimi a ciascuno degli estremi dell'intervallo. Peraltro, come nell'esempio sopra riportato, può succedere che uno o entrambi gli estremi siano valori finiti o infiniti.

Dunque siamo interessati alla questione seguente: fissato un punto $a \in \mathbb{R}$ (che non è detto appartenga al dominio di f), intendiamo valutare il comportamento di $f(x)$ quando x si avvicina ad a. Naturalmente, affinché la questione abbia senso, occorre che la funzione $f(x)$ sia definita almeno per valori di x vicini ad a, eventualmente anche solo a destra o solo a sinistra del punto a. A tale scopo iniziamo a dare la seguente definizione (in parte già incontrata nel capitolo 1).

Definizione 3.10 *Dato un numero $a \in \mathbb{R}$ chiamiamo* ***intorno di*** *a un qualsiasi intervallo della forma $(a-\delta, a+\delta)$ con $\delta > 0$. Un intervallo del tipo $(a, a+\delta)$ (rispettivamente, $(a-\delta, a)$) si dice* ***intorno destro*** *(rispettiv.,* ***sinistro****)* ***di*** *a.*

Se la funzione $f(x)$ è definita anche in un intervallo illimitato, ad esempio, $(x_0, +\infty)$, può essere utile studiare il comportamento di $f(x)$ per valori di x sempre più grandi. In altri termini, siamo interessati a considerare anche il caso in cui $a = +\infty$ (e anche $a = -\infty$). Per fornire una trattazione unificata, andiamo quindi ad estendere la nozione di intorno di a anche al caso in cui a è un valore infinito.

Definizione 3.11 *Un intervallo del tipo $(x, +\infty)$ (rispettivamente, $(-\infty, x)$) con $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi, si chiama* ***intorno di*** *$+\infty$ (rispettivamente,* ***di*** *$-\infty$).*

Analogamente a quanto visto per le successioni, la nozione matematica adeguata a descrivere il comportamento di $f(x)$ quando x si avvicina ad a è quella di limite. La nozione di limite per funzioni si può formulare in termini di quella già incontrata nel contesto delle successioni, in questo modo:

Definizione 3.12 *Sia a un numero reale oppure $+\infty$ o $-\infty$ e sia I un intorno di a. Data una funzione reale $f(x)$ definita per ogni $x \in I \setminus \{a\}$, un numero reale esteso L si dice* ***limite di*** *$f(x)$* ***per*** *$x \to a$ e si scrive*

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \quad \textit{oppure} \quad f(x) \to L \quad \textit{per } x \to a$$

se PER OGNI successione $\{a_n\}$ contenuta in $I \setminus \{a\}$ tale che $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = L$.

Se la funzione $f(x)$ è definita soltanto in un intorno destro (o sinistro) di un numero reale a, è naturale introdurre la nozione di limite destro (o sinistro) nel modo seguente.

Definizione 3.13 *Sia a un numero reale e sia I un intorno destro di a. Data una funzione reale $f(x)$ definita per ogni $x \in I$, un numero reale esteso L si dice* ***limite destro di*** $f(x)$ ***per*** $x \to a$ *e si scrive*

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \textit{oppure} \quad f(x) \to L \quad \textit{per } x \to a^+$$

se PER OGNI successione $\{a_n\}$ contenuta in I e tale che $a_n \to a^+$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = L$. In modo analogo si definisce il limite sinistro (scrivendo a^- al posto di a^+).

Dati un numero reale a, un suo intorno I e una funzione $f(x)$ definita almeno per ogni $x \in I \setminus \{a\}$, si possono considerare separatamente il limite destro, il limite sinistro e il limite di $f(x)$ per x che tende ad a. Il legame tra tali limiti è espresso dal seguente teorema.

Teorema 3.14 *Siano a un numero reale, I un intorno di a e $f(x)$ una funzione a valori reali definita per ogni $x \in I \setminus \{a\}$. Si ha che*

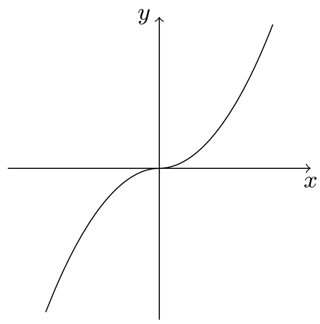
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L\,.$$

Osservazione 3.15 (i) Nell'ambito delle successioni, si studia il comportamento di una sequenza di numeri indicizzati da un parametro intero positivo n per valori di n sempre più grandi (e infatti, il limite di una successione $\{a_n\}$ è sempre preso per $n \to +\infty$). Invece, per i limiti di funzioni è **essenziale** precisare **il valore cui tende la variabile indipendente** x. Ad esempio, un conto è valutare il limite di $\frac{\log(1+x)}{x}$ per $x \to 0$, altra cosa è il limite della stessa funzione per $x \to -1^+$ o per $x \to +\infty$.

(ii) Per valutare il limite di una certa funzione $f(x)$ per $x \to a$, non basta studiare come si comporta la funzione lungo una particolare successione che tende ad a ma, in base alla definizione, occorre valutare il comportamento di $f(a_n)$ su **tutte** le successioni $a_n \to a$. Solo se tale limite è lo stesso valore L (finito o infinito) per tutte le successioni a_n che tendono ad a, allora si può concludere che L è il limite di $f(x)$ per $x \to a$. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ e studiamone il limite per $x \to +\infty$. Se scegliamo la successione $a_n = n\pi$ (che diverge a $+\infty$) otteniamo che $f(a_n) = 0$ per ogni n e quindi anche $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = 0$. Se però prendiamo la successione $\tilde{a}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (che pure diverge a $+\infty$) otteniamo che $f(\tilde{a}_n) = 1$ per ogni

n e quindi anche $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\tilde{a}_n) = 1$. Dunque la funzione $f(x) = \sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

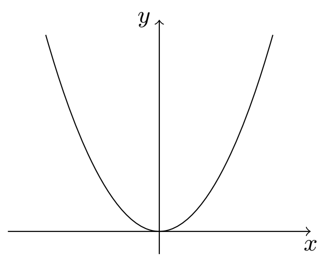
Esempio 3.16 (i limiti delle funzioni elementari)
Riportiamo di seguito i limiti delle funzioni elementari agli estremi degli intervalli su cui sono definite. Il grafico delle funzioni dovrebbe chiarire il significato geometrico dei limiti in questione.



$\boxed{f(x) = x^n \text{ con } n \text{ intero positivo dispari}}$

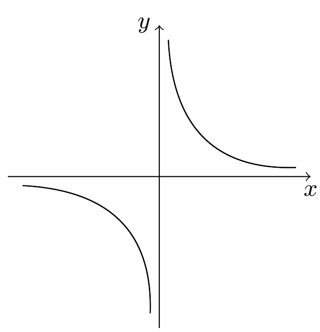
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$



$\boxed{f(x) = x^n \text{ con } n \text{ intero positivo pari}}$

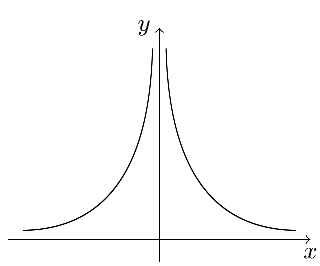
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$



$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^n} \text{ con } n \text{ intero positivo dispari}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

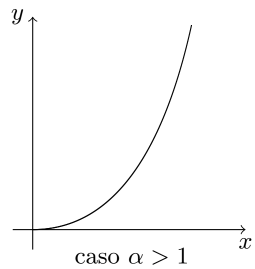
$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$



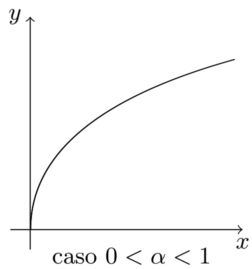
$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^n} \text{ con } n \text{ intero positivo pari}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$



caso $\alpha > 1$

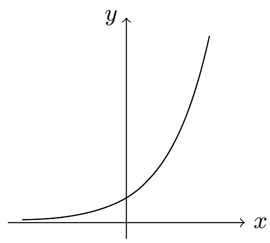


caso $0 < \alpha < 1$

$\boxed{f(x) = x^\alpha \text{ con } \alpha > 0}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$$

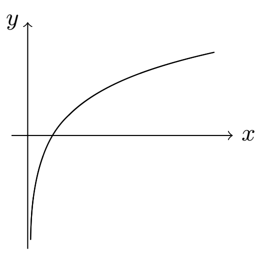
$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$$



$\boxed{f(x) = a^x \text{ con } a > 1}$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

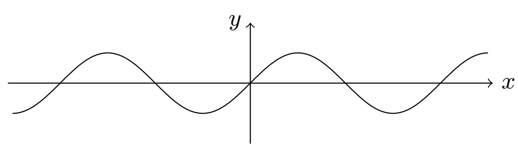
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$



$\boxed{f(x) = \log_a x \text{ con } a > 1}$

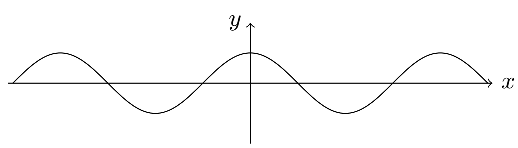
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$



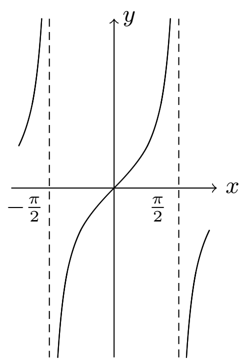
$\boxed{f(x) = \sin x}$

non esistono $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$



$\boxed{f(x) = \cos x}$

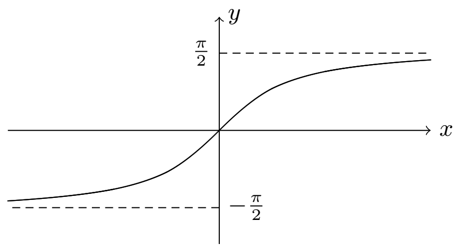
non esistono $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x$



$\boxed{f(x) = \tan x}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

non esiste $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$



$\boxed{f(x) = \arctan x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 3.17 (alcuni limiti notevoli fondamentali)
Applicando la definizione di limite di funzioni e usando i limiti di successioni dati nel teorema 3.8 e nel corollario 3.9, possiamo subito risolvere i seguenti casi:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \forall a > 0}$$

Si noti che sono limiti non immediati trattandosi di situazioni della forma $\frac{0}{0}$. Tutti i limiti precedenti sono da tener ben presente per il loro utilizzo negli esercizi.

3.8 I teoremi fondamentali sui limiti di funzioni

Attraverso la definizione di limite di funzione, tutti i teoremi fondamentali sui limiti di successioni ammettono una corrispondente versione per i limiti di funzioni.

- **Unicità del limite**

  Se $f(x) \to L_1$ per $x \to a$ e anche $f(x) \to L_2$ per $x \to a$, allora $L_1 = L_2$.

- **Permanenza del segno**

  (i) Se $f(x) \to L$ per $x \to a$ e $L > 0$ allora esiste un intorno I di a tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I$, $x \neq a$.

  (ii) Inoltre, se $f(x) \to L$ per $x \to a$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{a\}$ dove I è un intorno di a, allora $L \geq 0$.

- **Teorema del confronto**

  Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni a valori reali definite per ogni $x \in I \setminus \{a\}$, dove I è un intorno di a. Supponiamo che

  $$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I \setminus \{a\},$$
  $$f(x) \to L \text{ e } h(x) \to L \text{ per } x \to a.$$

  Allora anche $g(x) \to L$ per $x \to a$.

- **Limite e operazioni algebriche**

  Se $f(x) \to L$ e $g(x) \to M$ per $x \to a$ allora $f(x)+g(x) \to L+M$ e $f(x) \cdot g(x) \to L \cdot M$ per $x \to a$. Se inoltre $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I \setminus \{a\}$ (I intorno di a), allora $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L}{M}$ per $x \to a$. Tali conclusioni valgono in tutti i casi che non siano forme indeterminate.

Sul limite di funzioni vale anche questa ulteriore importante proprietà:

- **Composizione di limiti**

  Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{y \to L} g(y) = M$ allora $\lim_{x \to a} g(f(x)) = M$.

Osservazione 3.18 *Tutti i teoremi fondamentali sui limiti precedentemente elecati valgono anche per il limite destro e per il limite sinistro.*

Il risultato sulla composizione di limiti è molto utile perché permette di effettuare delle sostituzioni nel calcolo dei limiti, al fine di semplificare i conti. Infatti tale risultato ci dice che se vogliamo calcolare $\lim_{x \to a} g(f(x))$ e sappiamo che $\lim_{x \to a} f(x) = L$, possiamo porre $y = f(x)$, trasformare il limite iniziale scrivendo che

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to L} g(y)$$

e, infine, calcolare direttamente l'ultimo limite.

Esempio 3.19 *Verifichiamo che*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.}$$

Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e quindi non si può risolvere in modo immediato. Poniamo

$$y = \log(1+x) \quad \text{cioè} \quad x = e^y - 1\,.$$

Dunque

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1}\,.$$

Sappiamo che se $x \to 0$ allora $y = \log(1+x) \to 0$ e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1}.$$

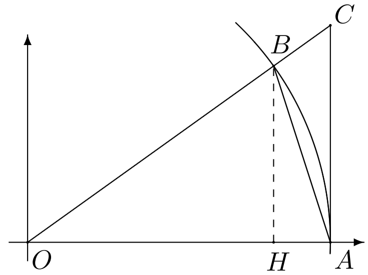
Ora scriviamo
$$\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1} = \frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y} \cdot \frac{y}{e^y-1} \cdot \alpha \,.$$
Sappiamo che
$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{y}{e^y-1}} = 1$$
Inoltre, effettuando la sostituzione $t = \alpha y$ abbiamo anche che
$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$
e così finalmente, applicando la regola dei limiti del prodotto, otteniamo il risultato desiderato.

3.9 Limiti notevoli per le funzioni trigonometriche

Teorema 3.20 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Dimostrazione. La dimostrazione qui presentata consta di tre parti; nella prima parte si prova, per via geometrica, la disuguaglianza
$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad \forall x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right). \tag{3.7}$$
Nella seconda parte si dimostra il limite destro $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Infine, nella terza parte si prova la tesi completa del teorema.

Prima parte: dimostrazione di (3.7).
Fissato $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, costruiamo la figura seguente, in cui x rappresenta l'angolo in radianti compreso tra le semirette uscenti dall'origine e passanti per A e B.



$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$

$\overline{BH} = \sin x$

$\widehat{AB} = x$

$\overline{AC} = \tan x$

Abbiamo che:

- area del triangolo $OAB = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{\sin x}{2}$,

- area del settore circolare $OAB = \dfrac{\overline{OA} \cdot \widehat{AB}}{2} = \dfrac{x}{2}$,
- area del triangolo $OAC = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{AC}}{2} = \dfrac{\tan x}{2}$.

Quindi, confrontando le tre figure geometriche di cui abbiamo calcolato l'area, troviamo che

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

cioè

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Siccome $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ abbiamo che $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$ e quindi, dividendo per $\sin x$ e passando ai reciproci, otteniamo la disuguaglianza (3.7).

Seconda parte: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Come abbiamo visto, si ha che $0 < \sin x < x$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Per il teorema del confronto per il limite destro, otteniamo che $\sin x \to 0$ per $x \to 0^+$. Dall'identità fondamentale della trigonometria deduciamo che $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2 \to 1$ per $x \to 0^+$ e quindi, essendo $\cos x > 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ricaviamo che $\cos x \to 1$ per $x \to 0^+$. Infine, applicando di nuovo il teorema del confronto, grazie a (3.7) otteniamo che $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0^+$.

Terza parte: conclusione.
Calcoliamo il limite sinistro $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$. Effettuando la sostituzione $x = -y$ abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y}.$$

Ma $\sin(-y) = -\sin y$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

per quanto provato nella seconda parte. Dunque anche il limite sinistro vale 1. Pertanto, per il teorema 3.14, possiamo concludere che $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$. $\square$

Teorema 3.21 *Se $x \to 0$ allora*

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}, \qquad \frac{\tan x}{x} \to 1, \qquad \frac{\arcsin x}{x} \to 1, \qquad \frac{\arctan x}{x} \to 1.$$

Dimostrazione. Per ottenere il primo limite moltiplichiamo e dividiamo per $1 + \cos x$ e sfruttiamo l'identità fondamentale della trigonometria e il limite notevole provato nel teorema 3.20:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - (\cos x)^2}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{(\sin x)^2}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} \to \frac{1}{2}.$$

Per il secondo limite utilizziamo la definizione di tangente e ancora il limite notevole del teorema 3.20:
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1\,.$$
Per quanto riguarda il terzo limite, effettuiamo la sostituzione $x = \sin y$, osservando che se $x \to 0$ allora $y = \arcsin x \to 0$ e quindi, per il teorema sulla composizione dei limiti,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin(\sin y)}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1\,.$$
Analogamente, per dimostrare il quarto limite, effettuiamo la sostituzione $x = \tan y$ e troviamo:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan(\tan y)}{\tan y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1\,. \ \square$$

Naturalmente, grazie alla definizione stessa di limite di funzioni, tutti i limiti sopra discussi si possono riformulare in versione sequenziale nel modo seguente: se $\{\varepsilon_n\}$ è una successione infinitesima, con $\varepsilon_n \neq 0$ per ogni n, allora
$$\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1\,, \quad \frac{1-\cos \varepsilon_n}{\varepsilon_n^2} \to \frac{1}{2}\,, \quad \frac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1\,, \quad \frac{\arcsin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1\,, \quad \frac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \to 1\,.$$

3.10 Relazioni asintotiche notevoli

Ricordiamo che due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, con $b_n \neq 0$ per ogni n, si dicono asintotiche (e si scrive $a_n \sim b_n$) se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. Tenuto conto dei limiti finora incontrati, abbiamo giustificato tutte le relazioni asintotiche elencate nella tabella riportata nell'osservazione 2.48 del capitolo precedente. Ad esempio, data una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ con $\varepsilon_n \neq 0$ per ogni n, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ si riformula in termini di relazione asintotica scrivendo che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ per $n \to +\infty$.

Tutte le relazioni asintotiche della tabella sopra citata si possono formulare equivalentemente nel contesto dei limiti di funzioni. Più precisamente, due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si diranno **asintotiche per** $x \to a$ se $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Naturalmente, affinché abbia senso parlare di limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \to a$ occorre che $f(x)$ e $g(x)$ siano definite in un intorno di a, escluso eventualmente il valore a, e che $g(x)$ non si annulli mai in tale intorno.

Dunque la tabella riportata nell'osservazione 2.48 può essere riscritta con $x \to 0$

al posto della successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$:

Per x → 0 si ha che			
$\log(1+x) \sim x$	$a^x - 1 \sim x \cdot \log a \quad (a > 0)$	$\sin x \sim x$	$\arcsin x \sim x$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x \quad (\alpha \neq 0)$	$\tan x \sim x$	$\arctan x \sim x$

Nota bene! Tali relazioni asintotiche valgono solo per $x \to 0$. Se si vuole trovare l'andamento asintotico di una funzione $f(x)$ vicino ad un valore $a \neq 0$, ci si può sempre riportare al caso $a = 0$ effettuando una traslazione, cioè considerando la funzione $g(y) = f(y + a)$ e studiando $g(y)$ vicino a 0. Ad esempio, consideriamo

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x - 1}}$$

e cerchiamo il comportamento asintotico di $f(x)$ vicino a 1 (in cui la funzione non è definita). Posto $y = x - 1$, troviamo

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1 + y} - 1}{\sqrt[3]{y}} .$$

Ora definiamo $g(y) = \frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{\sqrt[3]{y}}$ e cerchiamo il comportamento asintotico di $g(y)$ in 0. Possiamo sfruttare la relazione $(1 + y)^\alpha - 1 \sim \alpha y$ (per $y \to 0$), per concludere che

$$g(y) \sim \frac{\frac{1}{3} y}{y^{1/3}} = \frac{1}{3} y^{2/3} \quad \text{per } y \to 0$$

cioè, tornando alla variabile x,

$$f(x) \sim \frac{1}{3}(x - 1)^{2/3} \quad \text{per } x \to 1 .$$

3.11 Uso delle relazioni asintotiche

Per la relazione di asintoticità tra funzioni valgono le stesse regole già viste nel caso delle successioni, cioè:

- se $f(x) \to L$ per $x \to a$ con $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, allora $f(x) \sim L$ per $x \to a$,
- se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a$ allora $(f(x))^\alpha \sim (g(x))^\alpha$ per $x \to a$, per ogni α; in particolare $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$ per $x \to a$,

- se $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x) \\ f_2(x) \sim g_2(x) \end{cases}$ per $x \to a$ allora $f_1(x)\cdot f_2(x) \sim g_1(x)\cdot g_2(x)$ per $x \to a\,$,

- se $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x) \\ f_2(x) \sim g_2(x) \end{cases}$ per $x \to a$ allora $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ per $x \to a\,$.

Invece in generale non è vero che se $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$ allora $f_1(x) + f_2(x) \sim g_1(x) + g_2(x)$. Inoltre non si può mai scrivere che $f(x) \sim 0$ (perché non si può eseguire la divisione per zero).

Esempio 3.22 *Stabilire se esiste il limite* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x}$.

Dalla tabella precedente, per $x \to 0$ si ha che $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ e $e^x - 1 \sim x$. Quindi, ricordando che $\sqrt{x^2} = |x|$, abbiamo che

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x} \sim \frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{-x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siccome il limite destro e il limite sinistro sono diversi, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-e^x}$ non esiste.